$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$A \in \mathcal{A}$
$B \in \mathcal{A}$

1) $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$

2) isotonia di P

se $A \subseteq B$, allora $P(A) \leq P(B)$

Caso particolare: A qualunque $B = \Omega$

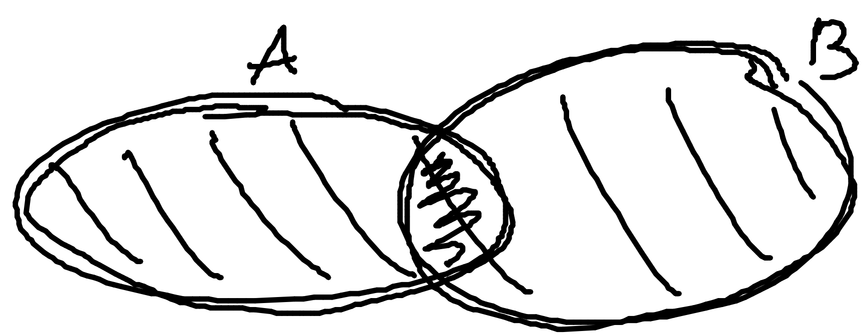
$0 \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$

3) (i) Se $A \cap B = \emptyset$, allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

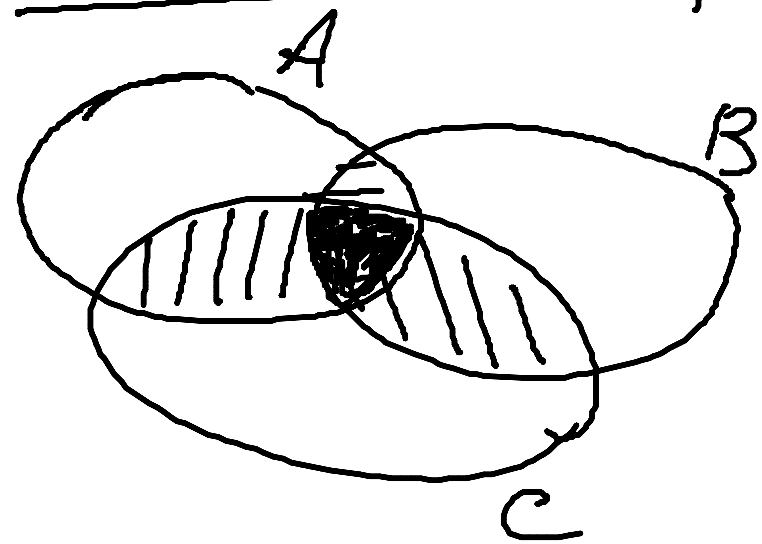
(ii) Per A e B qualunque

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Formula di inclusione – esclusione
Sylvester

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

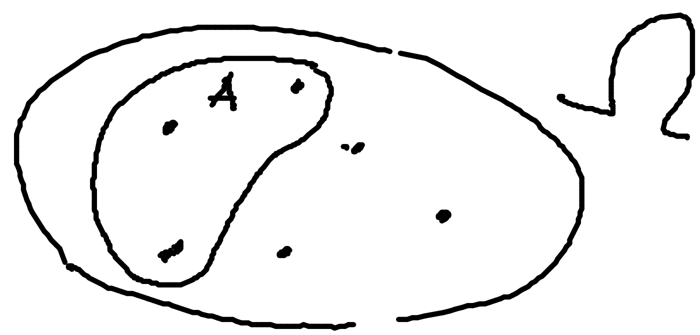


Spazio uniforme $\underline{\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)}$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\underline{\text{card}}\ \Omega < \infty$

$\forall\ \omega \in \Omega \qquad P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}\ \Omega}$

$\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = \underline{\underline{\frac{\text{card}\ A}{\text{card}\ \Omega}}}$



Probabilità condizionale

Un'urna contiene 10 palline
1, 2, 3, ... 10. Si esegue un'estrazione

$$A = \{\text{esce un numero pari}\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

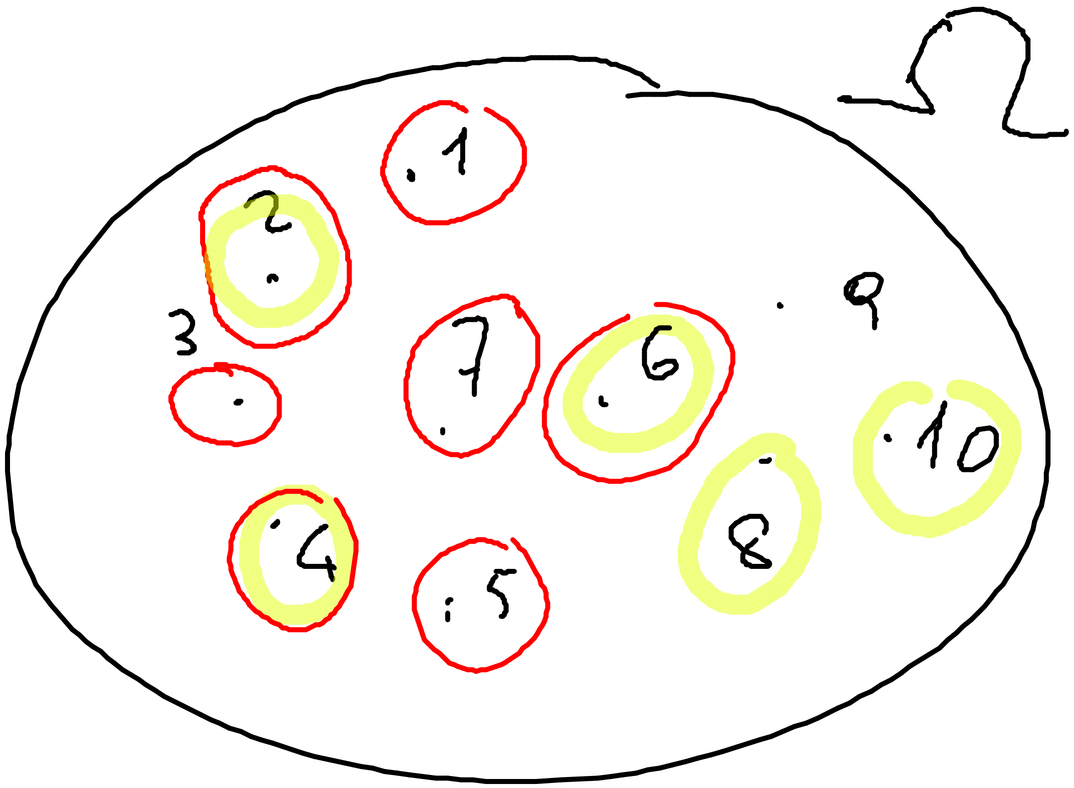
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, 10\}$$

$$\text{card}\,\Omega = 10$$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}\,\Omega} = \frac{1}{10}$$

$$P(A) = \frac{\text{card}\,A}{10}$$

$$\frac{3}{7}$$



$$\underline{\underline{P(A)}} = \frac{\text{card } A}{10} = \frac{5}{10}$$

$$B = \{\text{esce un numero} \leq 7\}$$

$$P(B) = \frac{7}{10}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

In $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sono assegnati due eventi A, B, con $P(B) > 0$

<u>Definizione</u>. Si chiama "<u>probabilità condizionale di A, dato B</u>" il numero

$$\underbrace{P(A/B)}= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(\cdot)$$

B fissato

$$\underline{Q} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$P(A|B) = Q(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(i) $Q(\Omega) = 1$

(ii) Se (A_n) è una succ. di eventi due a due disg. allora

$$Q\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n Q(A_n)$$

(i) $Q(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

(ii) $Q\left(\bigcup_n A_n\right) =$

$$= \frac{P\left(\left(\bigcup_n A_n\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_n (A_n \cap B)\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{n} P(A_n \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \sum_{m} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n} Q(A_n)$$

B

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A) = P(A \mid B)}$$

$A, B \in \mathcal{A}$ $\quad P(B) > 0$

Definizione (provvisoria). Si dice che A e B sono tra loro indipendenti se

$$P(B) = P(B|A)$$

$$P(A) = P(A|B)$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Se $P(B) = 0$ anche $P(A \cap B) = 0$

$A \cap B \subseteq B$ $P($

Definizione: A e B si dicono tra loro indipendenti se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si eseguono 2 lanci di una moneta equilibrata

$A = \{ \text{al } 1^\circ \text{ l. esce } 1 \}$

$B = \{ \text{al } 2^\circ \text{ l. esce } 0 \}$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

$$\Omega = \{\underset{\sim}{(0,0)}, \underset{\sim}{(0,1)}, \underset{\sim}{(1,0)}, \underset{\sim}{(1,1)}\}$$

$$= \{0,1\} \times \{0,1\} = \{0,1\}^2$$

$A \cap B = \{(1,0)\}$

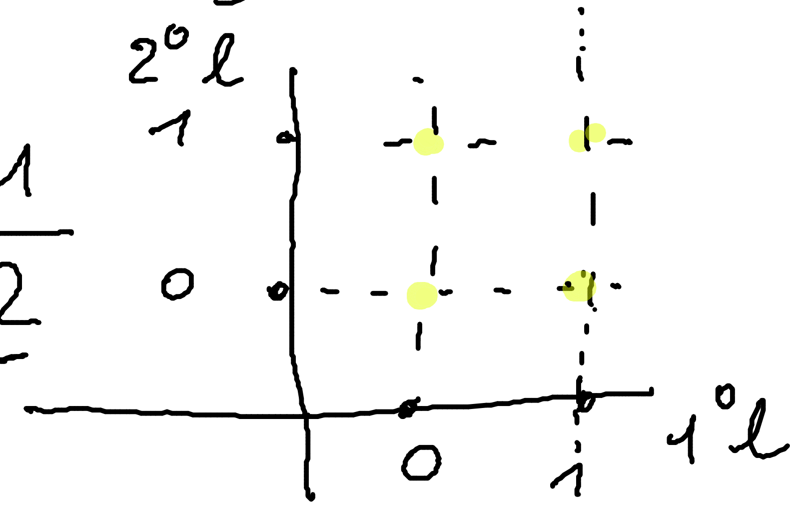
$A = \{(1,0), (1,1)\}$

$P(A) = \frac{1}{2}$

$B = \{(0,0), (1,0)\}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$



A, B, C tre eventi

$$\begin{cases} P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B) \\ P(A\cap C) = P(A)\cdot P(C) \\ P(B\cap C) = P(B)\cdot P(C) \end{cases}$$

$C=\emptyset$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

Esercizio

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{4} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$A = \{1,2\} \quad ; \quad B = \{1,3\}, \quad C = \{1,4\}$$

Verificare che A, B, C sono 2 a 2 indipendenti ma non sono (globalmente) indipendenti.

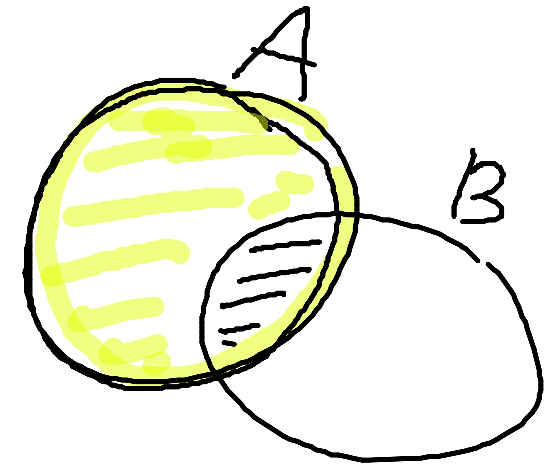
Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di eventi.

<u>Definizione</u>. Si dice che gli $(A_i)_{i \in I}$ sono una famiglia di eventi indipendenti se presi comunque $i_1, i_2, \dots, i_n$ $\forall n$ si ha

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_n})$$

Se A e B indipendenti

$\Rightarrow A$ e B^c indipendenti



$$P(A \cap B^c) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B^c)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A) \cdot P(B) = \underbrace{P(A)\left(1 - P(B)\right)}_{P(A) \cdot P(B^c)}$$

$A_1^c, A_2, A_3^c, \ldots, A_n$

tra loro indipendenti

Corso B in aula A

Corso A in aula B

Schema delle prove indipendenti

Si lancia n volte una moneta che dà 1 con probabilità p $(0 < p < 1)$. Costruire

$$(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

$$\Omega = \{0,1\}^n \qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$n = 5 \qquad (0, 1, 1, 0, 0)$

$$\operatorname{card} \Omega = 2^n$$

$$P = ?$$

$n = 5 \longrightarrow \omega = (0, 1, 1, 0, 0)$

eventi indipendenti

$A_1 = \{\text{esce 1 al } 1^\circ \text{ l}\}$

$A_2 = \{\text{esce 1 al } 2^\circ \text{ l}\}$

$\vdots$

$A_5 = \{\text{esce 1 all'n-esimo l.}\}$

$\{\omega\} = A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c$

$A_1^c \cap A_2 \cap A_3$

$(0, 1, 1 \ldots)$

$P(\{\omega\})$

$P(A_i) = p \quad \forall i$

$$P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) =$$

indipendenza

$$= \underbrace{P(A_1^c)}_{(1-p)} \cdot \underbrace{P(A_2)}_{p} \cdot \underbrace{P(A_3)}_{p} \cdot \underset{(1-p)}{P(A_4^c)} \cdot \underset{(1-p)}{P(A_5^c)}$$

$$P(\{\omega\}) = p^2 (1-p)^3 \qquad \omega = (0,1,1,0,0)$$

$$P(\{(1,1,1,0,1)\}) = p^4(1-p)$$

$$\Omega = \{0,1\}^n \qquad \forall\, \omega \in \Omega$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

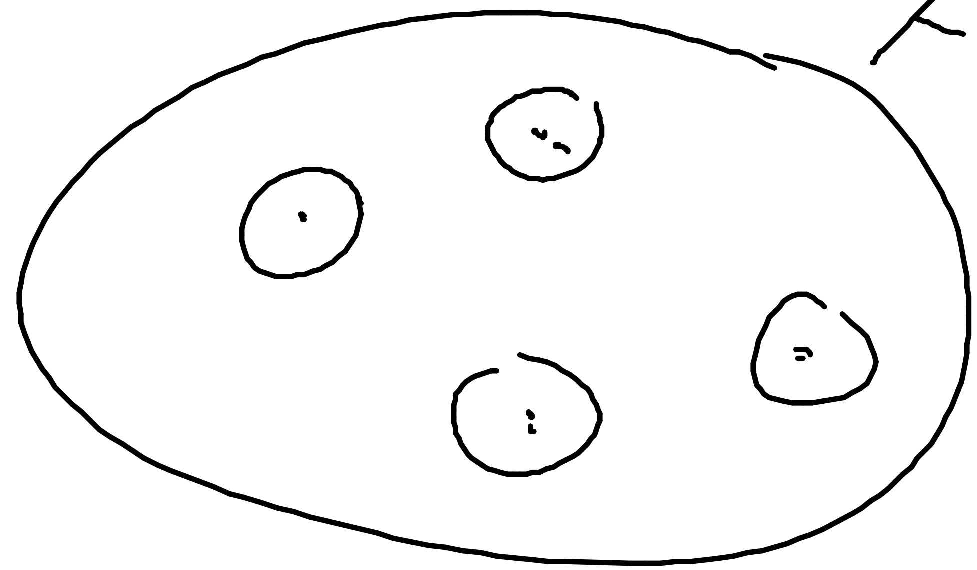
$$\boxed{\underline{P(\{\omega\})} = p^{\sum \omega_i}\,(1-p)^{n-\sum \omega_i}}$$

numero di simboli "1" nella sequenza $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$.

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) =$$

$$= \sum_{\omega \in A} p^{\sum \omega_i} (1-p)^{n - \sum \omega_i}$$



A

$$\underline{0} \le \underbrace{P(A \cap B)} \le P(B) = \underline{0}$$